Gymnasium Liestal | Maturitätsprüfungen 2004
Mathematik Profil A | Klasse 4A

Bemerkungen: - Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.

Hilfsmittel: - Taschenrechner mit Anleitung und Formelsammlung.

Punkte: - Bei jeder der 5 Aufgaben können maximal 12 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1 (Vektorrechnung)

1. Wir verfolgen die Bahn einer Kugel mit dem Radius $R = 9$, welche auf der Ebene $E: x + 2y + 2z - 42 = 0$ nach unten rollt.

1.1. $M(-1/-4/39)$ ist der Kugelmittelpunkt in der Startposition der Kugel. Zeigen Sie, dass die Kugel auf der Ebene E liegt. (3P.)

1.2. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden *f*, auf welcher die Kugel nach dem Loslassen nach unten rollt. Beschreiben Sie eine Möglichkeit, Ihr Resultat zu kontrollieren und führen Sie diese Kontrolle durch. (5P.)

1.3. Die Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 38 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$ kann für die nach unten rollende Kugel ein Hindernis sein.

1.3.1. Prüfen Sie, ob dies für $c = 5$ der Fall ist. (2P.)

1.3.2. Für welche Werte von c stellt die Gerade g ein Hindernis für die rollende Kugel dar? (2P.)

Aufgabe 2 (Analysis)

2. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = \left(x^2 - \frac{2x}{a}\right) \cdot e^{ax} \quad (a > 0)$. Die Graphen von $f_a(x)$ heissen G_a.

2.1. Begründen Sie, dass jeder Graph G_a genau zwei Extremalstellen hat. (2P.)

2.2. Berechnen Sie die Gleichungen der Kurven, auf denen die Hochpunkte bzw. Tiefpunkte von G_a liegen. (3P.)

2.3. In der Nullstelle mit positivem x-Wert wird die Tangente t an G_a gelegt. Diese Tangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Für welche Kurve der Schar $f_a(x)$ ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks $\frac{4}{e}$? (3P.)

2.4. Jeder Graph G_a schliesst mit der x-Achse zwei Flächenstücke ein.

2.4.1. Berechnen Sie ihre Flächeninhalte für $a = 1$. Was fällt Ihnen auf? (2P.)

2.4.2. Prüfen Sie nach, ob Ihre Feststellung für alle Graphen von G_a zutrifft. (2P.)

Aufgabe 3 (Wahrscheinlichkeitsrechnung)

3. Auf einem Flughafen werden die Gepäckstücke unabhängig voneinander auf ein Transportband gelegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gepäckstück den Zielflughafen Basel hat, sei p.

3.1. Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei auf dem Band hintereinander liegenden Gepäckstücke mindestens eines nicht den Zielflughafen Basel hat, ist 93.75%. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p. (2P.)

Wenn Sie 3.1. nicht lösen können, wählen Sie für 3.2 und 3.3. $p = 0.25$.

3.2. Wir betrachten 10 hintereinander liegende Gepäckstücke. Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für:

3.2.1. Genau drei Gepäckstücke haben den Zielflughafen Basel. (1P.)

3.2.2. Das zehnte Gepäckstück ist das dritte nach Basel. (1P.)

3.2.3. Genau drei Gepäckstücke haben Basel als Zielflughafen und liegen auf dem Band direkt hintereinander. (1P.)

3.2.4. Genau drei Gepäckstücke haben Basel als Zielflughafen, wobei mindestens zwei dieser drei Gepäckstücke direkt hintereinander liegen. (2P.)

3.3. 1% der Gepäckstücke wird fehlgeleitet; von den fehlgeleiteten Gepäckstücken haben 20% den Zielflughafen Basel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird demnach ein Gepäckstück, das den Zielflughafen Basel hat, richtig weitergeleitet? (2P.)

3.4. Jedes Gepäckstück wird mit einem Kleber mit Strichcode gekennzeichnet, mit dessen Hilfe der Zielflughafen automatisch ermittelt wird. Das automatische Lesen misslingt in 11.5% der Fälle, weil mindestens einer der beiden unabhängigen Fehler A: „Kleber zerknittert“ oder B: „Kleber zerrissen“ auftritt.

3.4.1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler A, wenn der Fehler B mit einer Wahrscheinlichkeit von 8.5% auftritt. (2P.)

3.4.2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt nur einer der beiden Fehler A oder B auf? (1P.)

Aufgabe 4 (Extremalaufgabe)

4. Einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB} = G$ und der Höhe $\overline{CM} = H$ werden gleichschenklige Dreiecke MUV einbeschrieben, wobei M der Mittelpunkt von AB und UV parallel zu AB ist.

4.1. Welches von diesen einbeschriebenen Dreiecken MUV hat maximalen Flächeninhalt? (4P.)

4.2. Für die folgende Aufgabe ist $G = 10$ und $H = 15$.

4.2.1. Berechnen Sie Basis und Höhe (auf diese Basis) des einbeschriebenen Dreiecks MUV mit extremalem Umfang. (3.5P.)

4.2.2. Handelt es sich bei der Lösung von Teilaufgabe 4.2.1. um ein Maximum oder ein Minimum? (1P.)

4.2.3. Wenn Sie die Teilaufgabe 4.2.1 richtig gelöst haben, sind M, U und V die Höhenfusspunkte des Dreiecks ABC. Kontrollieren Sie dies. (3.5P.)

Aufgabe 5

5. Die folgende Aufgabe besteht aus 2 voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

5.1. Von 100 neugeborenen Jungen wurde das Körpergewicht G bestimmt. Treffen Sie die Annahme, dass G eine normalverteilte Zufallsgrösse ist.

Körpergewicht (in g)	Anzahl
G≤2600	1
2600<G≤2800	5
2800<G≤3000	11
3000<G≤3200	9
3200<G≤3400	19
3400<G≤3600	13
3600<G≤3800	16
3800<G≤4000	16
4000<G≤4200	3
4200<G≤4400	4
4400<G	3

5.1.1. Bilden Sie die kumulierte Häufigkeitsverteilung $H(G \leq a)$ mit $a = 2600, 2800, \ldots, 4600g$. Interpretieren Sie H als kumulierte Wahrscheinlichkeiten $P(Z \leq b)$ einer standardisierten Zufallsgrösse Z. Notieren Sie (ohne Interpolation) zu jedem Wert a den zugehörigen Wert b. (2P.)

5.1.2. Die Punkte (a / b) liegen ungefähr auf einer Geraden. Begründen Sie dies. (2P.)

5.1.3. Berechnen Sie mit dem Taschenrechner die Regressionsgerade durch diese Punkte. (1P.)

5.1.4. Bestimmen Sie auf Grund der Gleichung der Regressionsgeraden den Erwartungswert $E(X) = \mu$ und die Standardabweichung σ der Zufallsgrösse G. (1P.)

5.2. Aus der Physik ist bekannt, dass sich eine in einem Zylinder rotierende Flüssigkeit mit parabolischer Mantelfläche aufstellt (siehe Abb.). Die Flüssigkeit im Gefäss hat das Volumen V. Berechnen Sie aus h und r die Gleichung der begrenzenden Parabel in möglichst einfacher Form. (6P.)