

-
- Bemerkungen:
1. Zeit: 4 Stunden. Alle Lösungsschritte müssen dokumentiert werden.
 2. Hilfsmittel: Taschenrechner mit Anleitung, Formelsammlung
 3. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!
 4. Die Darstellung der Lösungen wird mitbewertet!
 5. Bei jeder Aufgabe sind 12 Punkte möglich (Halbaufgabe: 6 Punkte).
-

Viel Erfolg wünschen Ihnen B. Felder, G. Lafranchi, E. Rast und R. Ugolini!

1. Aufgabe: Extremalproblem und Rotationsvolumen

Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{20}{x^2 + 4}$.

Die Teilaufgaben a) bis c) können unabhängig voneinander gelöst werden.

- a) Diskutieren Sie die Funktion ohne abzuleiten (Definitionsbereich, Pol, Symmetrie, Nullstellen, Asymptote, y-Achsenabschnitt) und zeichnen Sie den Graphen. (3P)
- b) Der Graph und die x-Achse begrenzen ein unendliches Flächenstück. In dieses Flächenstück soll ein Rechteck ABCD mit maximalem Flächeninhalt einbeschrieben werden, wobei die Ecken A und B auf der x-Achse und die Ecken C und D auf dem Graphen liegen sollen. Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt des Rechtecks. (3.5P)
- c) c₁) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Geraden $g(x) = 2.5$ mit dem Graphen von $f(x)$. (0.5P)
Die Gerade $g(x) = 2.5$ und der Graph von $f(x)$ begrenzen ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn dieses Flächenstück
c₂) um die x-Achse rotiert. (2P)
c₃) um die y-Achse rotiert. (2.5P)
c₄) Bleibt das Volumen bei Rotation um die y-Achse endlich, wenn die Gerade $g(x) = 2.5$ gegen die x-Achse strebt? Begründen Sie Ihre Antwort. (0.5P)

2. Aufgabe: Steckbrief und Flächenberechnung

Die Teilaufgaben a)-c) können unabhängig voneinander gelöst werden.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x^2 + a \cdot x) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ mit $a > 0$.

- a) Diskutieren Sie die Funktion für $a = 3$ (Nullstellen, Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$, Hoch- und Tiefpunkte) und zeichnen Sie den Graphen. (3P)
- b) Die Funktion $f(x)$ soll für $a = 3$ durch $g(x) = -x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D$ so angenähert werden, dass beide Funktionen die gleichen Nullstellen und die gleiche Steigung im Ursprung haben. Bestimmen Sie die Gleichung für $g(x)$. (4P)
- c) c₁) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f(x)$ in Abhängigkeit von a . (1P)
c₁) Zwischen dem Graphen der Funktion $f(x)$ und der x-Achse gibt es zwei Flächenstücke. Für welches $a > 0$ haben diese beiden Flächenstücke den gleichen Flächeninhalt? (4P)

3. Aufgabe: Vektorgeometrie

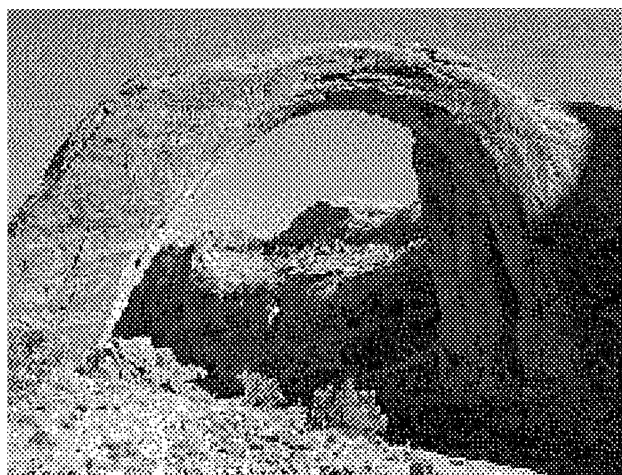
Eine Fliege verlässt zum Zeitpunkt $t = 0$ den Punkt $A(-3/2/-1)$ (Koordinaten in Meter) und bewegt sich geradlinig durch das Wohnzimmer zum Punkt $B(1/10/-1)$. Gleichzeitig ($t = 0$) startet eine Biene auf einer Blume im Punkt $C(4/2/-5)$. Sie fliegt auch geradlinig und in Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Zeigen Sie, dass die Flugbahnen sich schneiden und berechnen Sie den Schnittpunkt S. (2.5P)
- Die Fliege braucht 1.5 Sekunden von A bis S. Die Biene ist mit der Geschwindigkeit $\sqrt{14}$ m/s unterwegs. Welches Insekt trifft zuerst im Schnittpunkt S der Flugbahnen ein? (1P)
- Unter welchem Winkel schneiden sich die Flugbahnen? (1.5P)
- Wie nah fliegt die Fliege an der Blume (Punkt C) vorbei? (2.5P)
- Die Fliege landet im Punkt B auf einem ebenen (unbeweglichen) Lampenschirm, der in der Ebene E_{BDF} mit $D(2/1/4)$ und $F(3/1/6)$ liegt. Berechnen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E_{BDF} . (1.5P)
- Ein Kind wirft vom Punkt $G(-4/8/5)$ aus einen elastischen Gummiball auf die Fliege auf dem Lampenschirm. Er trifft den Lampenschirm genau am richtigen Ort im Punkt B. (Die Fliege entweicht aber rechtzeitig). In welche Richtung prallt der Ball vom Lampenschirm ab? Die Erdanziehung und die Ausdehnung des Gummiballs dürfen vernachlässigt werden. (3P)

4. Halbaufgabe: Quadratische Funktion

Die Rainbow Bridge beim Powell See in Arizona ist eine natürliche Sandsteinbrücke, die durch Erosion entstanden ist. Die Höhe und die Breite betragen je 100 m. In der Aufsicht kann die Brücke gut mit einer Parabel angenähert werden. Weitere Ausdehnungen der Brücke sollen vernachlässigt werden.

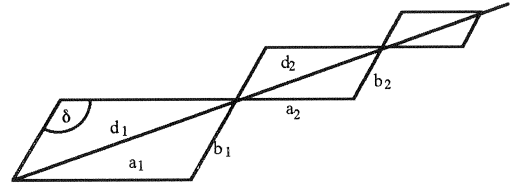
- Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel, wenn sich der Ursprung des Koordinatensystems 10 m links vom linken Fuss des Bogens auf dem horizontalen Boden befindet (Wenn Sie diese Teilaufgabe nicht lösen können, verwenden Sie $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{24}{5}x - 44$). (2P)
- Ein Indianer liegt 26 m links vom Ursprung auf dem Boden und beobachtet einen Goldadler, der gemütlich auf der zugewandten Seite der Brücke sitzt. Er sieht diesen unter einem Winkel von 45° . Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, wo der Goldadler sitzt. (2P)
- Die Sonne steht links von der Brücke in der Parabelebene und scheint unter einem Winkel von 45° . In welchem Punkt streifen die Sonnenstrahlen die Brücke und wie lang ist der Schatten der Brücke? (2P)



5. Halbaufgabe: Folge und Reihe

Gegeben ist eine unendliche Folge von zu einander ähnlichen Parallelogrammen P_i (Abbildung).

Das erste Parallelogramm P_1 hat die Seitenlängen $a_1 = 6$ cm und $b_1 = 3$ cm, das zweite P_2 hat die Seitenlängen $a_2 = 4$ cm und $b_2 = 2$ cm. Der Winkel δ beträgt 120° .



- Berechnen Sie den Gesamtflächeninhalt A der (unendlich weitergeführten) Figur exakt. (3P)
- Vom wievielten Parallelogramm P_n an ist dessen Flächeninhalt kleiner als $1/1000$ des Gesamtflächeninhalts A ? (1.5P)
- Berechnen Sie die Gesamtlänge der Diagonale d der (unendlich weitergeführten) Figur. (1.5P)

6. Aufgabe: Kombinatorik

Die untenstehenden 3 Teilaufgaben 6.1 bis 6.3 sind unabhängig voneinander.

- Wieviele Möglichkeiten gibt es für die 15-köpfige 4Wb, im Klassenzimmer auf 15 Stühlen Platz zu nehmen? (1P)
 - Wieviele Sitzanordnungen gibt es, wenn 20 Stühle zur Verfügung stehen? (1P)
 - Wie viele Buchstabenfolgen lassen sich mit den Buchstaben WIRTSCHAFT bilden? (1P)
 - Wie viele dieser Wörter in Aufgabe c) enthalten das Teilwort FIRST? (1P)
- An einem Kongress in Oslo können aus Zeitgründen nur 6 neue Behandlungsmethoden vorgestellt werden. Zur Auswahl stehen 4 dänische, 7 norwegische und 5 schwedische Methoden. Alle Länder sollen gleich viele Methoden vorstellen dürfen.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat die Kongressleitung bei der Auswahl der Beiträge,

 - wenn es nur darauf ankommt, welche Behandlungsmethoden ausgewählt werden? (2P)
 - wenn es darauf ankommt, welche Behandlungsmethoden ausgewählt werden und in welcher Reihenfolge diese vorgestellt werden, wobei die Beiträge des gleichen Landes hintereinander erläutert werden sollen. (2P)
- An einer Wohltätigkeitsveranstaltung des Roten Kreuzes wird folgendes Glücksspiel angeboten: Nachdem eine Person ihren Einsatz bezahlt hat, darf sie einen Spielwürfel hintereinander dreimal werfen. Kommt die Augenzahl Sechs in ungerader Anzahl vor, so erhält sie ihren Einsatz E zurück und gewinnt Fr. 25.-, sonst verliert sie ihren Einsatz.

 - Wieviele Spielausgänge beim dreimaligen Würfeln sind möglich? (1P)
 - Bei wievielen davon gewinnt das Rote Kreuz? (1P)
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt das Rote Kreuz dreimal nacheinander? (1P)
 - Wie gross muss der Einsatz sein, damit das Rote Kreuz durchschnittlich mit Fr. 10.- Gewinn pro Spiel rechnen kann? (1P)