

Bemerkungen : Die Lösung jeder Aufgabe wird mit 7 Punkten bewertet.
Für die Note 6 müssen mindestens 39 Punkte erzielt werden.
Hilfsmittel : Ein Taschenrechner (nicht graphikfähig) . Formelsammlung.

Aufgabe 1

Durch die Gleichung $y = x^3 - kx^2 + 2$, in welcher der Parameter k nur positive Werte annehmen soll, ist eine Kurvenschar gegeben. Im folgenden bedeutet „Kurve“ immer eine Kurve aus dieser Schar.

- Nennen Sie drei Eigenschaften, welche *alle* Kurven haben. Skizzieren Sie den typischen Kurvenverlauf.
- Für welchen Wert von k *berührt* die Kurve die x -Achse ? Wie gross ist in diesem Fall die Ordinate des Wendepunktes ?
- Für welchen Wert von k liegt der Wendepunkt der Kurve auf der x -Achse ? Berechnen sie für diesen Fall alle Schnittpunkte der Kurve mit der x -Achse .

Aufgabe 2

Die Punkte B und D sind gegeben: $B(5 ; 0 ; 10)$; $D(2 ; 21 ; 10)$.

- BD ist eine Diagonale eines Quadrates ABCD. A liegt in der x - y -Ebene, *nicht* auf einer Koordinatenachse. Berechnen sie die Koordinaten des Punktes A .
- Von den folgenden drei Aufgaben i) , ii) und iii) ist eine sinnvoll, eine sinnlos und eine bedingt sinnvoll. Erklären Sie, warum das so ist, und schreiben Sie für die sinnvolle einen detaillierten Lösungsplan.
A, B, C und D sind die Punkte der Teilaufgabe a) .
 - Welche von allen quadratischen Pyramiden mit der Grundfläche ABCD und der Spitze S auf der Ebene $E: 2x - 4y - z = 15$ hat maximales Volumen ?
 - Wie gross ist das Volumen der *geraden* quadratischen Pyramide mit der Grundfläche ABCD und der Spitze S auf der Ebene $E: 2x - 4y - z = 15$?
 - Wie gross ist das Volumen der *geraden* quadratischen Pyramide mit der Grundfläche ABCD und der Spitze S auf der Geraden durch die gegebenen Punkte P und Q ?

Aufgabe 3

Auf dem Schenkel s_1 eines spitzen Winkels α ist vom Scheitel aus die Strecke der Länge d abgetragen. Vom Endpunkt dieser Strecke wird das Lot l_1 auf den anderen Schenkel s_2 gefällt. Vom Fusspunkt des Lotes l_1 wird das Lot l_2 wieder auf den Schenkel s_1 gefällt. Vom Fusspunkt des Lotes l_2 wird dann das Lot l_3 auf den gegenüberliegenden Schenkel s_2 gefällt, usw. ohne Ende.

- Berechnen Sie die Summe der Längen aller auf diese Weise gebildeten Lote, ausgedrückt durch d und α .
- Für welchen Winkel α beträgt die Summe der Längen aller Lote gerade $2d$?
- Untersuchen Sie, wie sich die Summe der Längen aller Lote verhält, wenn der Winkel α beliebig klein wird.

Aufgabe 4

Eine 10 m lange Fussgängerunterführung hat als Querschnitt ein Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis, dessen Durchmesser gleich der Breite der Unterführung ist. Die Querschnittsfläche ist 15 m^2 . Boden, Wände und Gewölbe werden ausgemauert, wobei die Kosten für den Boden 200 Fr. , für die Wände 400 Fr und für das Gewölbe 800 Fr. pro m^2 betragen.

a) Drücken Sie die Gesamtkosten y (in Fr.) für die Ausmauerung als Funktion der Breite x (in m) aus und zeigen Sie, dass gilt : $y = 1000 \cdot \frac{(2 + 3\pi)x^2 + 120}{x}$.

Bestimmen Sie den für die Aufgabe sinnvollen Definitionsbereich dieser Funktion.

b) Welche Breite besitzt die Unterführung und wie hoch sind die Wände, wenn die erwähnten Gesamtkosten minimal sein sollen? (Resultate mit drei geltenden Ziffern angeben!)
Begründen Sie, dass Sie tatsächlich ein Minimum gefunden haben.

Aufgabe 5

Gegeben sind die Kurvenschar: $y = \frac{a}{x^2}$ ($a > 0!$) und die Parabel mit der Gleichung $y = 4 - \frac{x^2}{2}$.

a) Berechnen Sie den Wert von a so, dass die Kurve der Schar die Parabel berührt. Wie lauten die Koordinaten des Berührungspunktes im ersten Quadranten ?

Hinweis für die beiden folgenden Teilaufgaben b) und c):

Sollten Sie bei **a)** kein ganzzahliges Resultat gefunden haben, so lösen Sie **b)** und **c)** für die Kurven mit den Gleichungen $y = \frac{64}{x^2}$ und $y = 8 - \frac{x^2}{4}$, welche sich in $C(4; 4)$ berühren.

b) Die Parabel, die in **a)** bestimmte Kurve und die x -Achse begrenzen im ersten Quadranten ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück.
Zeigen Sie, dass sein Inhalt endlich ist, und berechnen Sie diesen Inhalt exakt.

c) Hat die Fläche, welche von den zwei Ästen des in **a)** bestimmten Graphen und der Parabel im ersten und zweiten Quadranten begrenzt wird und sich nach oben ins Unendliche erstreckt, auch endlichen Inhalt ?

Aufgabe 6

In einer Urne befinden sich nummerierte Kugeln. Als Nummern kommen alle natürlichen Zahlen von 1 bis 99 vor, wobei $(100 - i)$ Kugeln die Nummer i tragen.

a) Wieviele Kugeln befinden sich in der Urne?

b) Es wird eine Kugel gezogen. i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ihre Nummer < 10 ?
ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ihre Nummer ungerade ?

c) Bei einem Spiel gewinnt man, wenn die gezogene Zahl $\geq N$ ist. Kann man N so wählen, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit *exakt* 0.5 ist ?

d) Es werden nacheinander 10 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit tragen fünf eine gerade und fünf eine ungerade Nummer ?