Gymnasium Liestal

Mathematatik schriftlich

Maturitätsprüfung 2003

Klasse 4S

Bemerkungen:

- Es werden alle Aufgaben gleich bewertet.
- Die Darstellung der Lösungen wird mitbewertet.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Die Reihenfolge ist freigestellt.
- Die Prüfungszeit beträgt 4 Stunden.
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner und Formelsammlung.

Aufgabe 1

Ein Drittel aller Eier einer Hühnerfarm sind weiss, die anderen Eier sind braun. Die Eier werden ohne Berücksichtigung der Farbe in Schachteln zu je 4 Stück verpackt.

a) Zeigen Sie, dass sich in einer Schachtel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{9}$ mehr weisse als braune Eier befinden.

Die Teilaufgaben b), c) und d) sind unabhängig voneinander lösbar:

b) Wie viele Eierschachteln muss jemand mindestens kaufen, damit sich darunter mit 90%iger Sicherheit wenigstens eine mit mehr weissen als braunen Eiern befindet ?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzen mindestens 3 von 10 Schachteln mehr weisse als braune Eier ?

d) Wir setzen voraus, dass der Vorrat an Eiern unerschöpflich gross sei. Jemand kauft hintereinander so viele Eierschachteln, bis er eine Schachtel mit mindestens so vielen braunen als weissen Eiern erwischt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er eine gerade Anzahl Schachteln kaufen muss ?

Aufgabe 2

$E_1: 2x + 14y - 5z + 133 = 0, \quad E_2: 2x + 2y + z - 29 = 0, \quad M(1/0/0)$

a) Zeigen Sie, dass es eine Kugel K mit dem Mittelpunkt M gibt, welche die Ebenen E_1 *und* E_2 berührt, und berechnen Sie die zugehörigen Berührungspunkte B_1 und B_2. Wie lautet die Kugelgleichung ?

K ist die Inkugel eines geraden Kreiskegels. E_1 ist die Ebene, in welcher der Grundkreis des Kegels liegt. Der Kegelmantel berührt die Ebene E_2.

b) Berechnen Sie die Kegelspitze S.

c) Die Punkte, in welchen der Kegelmantel die Ebene E_2 berührt, liegen auf einer Geraden i. Finden Sie eine Parametergleichung von i.

d) Berechnen Sie den Grundkreisradius r* des Kegels.

Aufgabe 3

$M(1/1/1), \quad P(7/-2/1), \quad Q(9/-1/-1), \quad h: \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt F des Dreiecks MPQ.

b) Stellen Sie die Koordinatengleichung der durch die Punkte M, P und Q bestimmten Ebene E auf.

c) Die Gerade g verläuft durch die Punkte P und Q. Der Kreis k liegt ebenfalls in der Ebene E, besitzt den Mittelpunkt M und berührt die Gerade g. Bestimmen Sie den Berührungspunkt B und den Kreisradius r.

d) Zeigen Sie, dass der Punkt D, in welchem die Gerade h die Ebene E durchstösst, auf dem Kreis k liegt.

e) Die Gerade i liegt in der Ebene E und schneidet die Gerade h rechtwinklig. Stellen Sie eine Parametergleichung der Geraden i auf. Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Gerade i eine Tangente des Kreises k ist.

Aufgabe 4

Gegeben sind die Kurvenschar: $y = \frac{a}{x^2}$ (Parameter $a > 0$) und die Parabel $p: \; y = 4 - \frac{1}{2}x^2$.

a) Berechnen Sie den Wert von a derjenigen Kurve k_1 der Schar, welche die Parabel p berührt. Berechnen Sie den im 1. Quadranten liegenden Berührungspunkt B.

Hinweis: Sollten Sie bei a) keine ganzzahligen Resultate gefunden haben, so lösen Sie die folgenden, voneinander unabhängigen Teilaufgaben b), c) und d) für die Kurven $k_1: \; y = \frac{64}{x^2}$ und $p: \; y = 8 - \frac{1}{4}x^2$, welche sich im Punkt B(4/4) berühren.

b) Die Parabel p, die Kurve k_1 und die x-Achse begrenzen im 1. Quadranten ein sich nach rechts ins Unendliche erstreckendes Flächenstück F_1. Zeigen Sie dass sein Inhalt endlich ist, und berechnen Sie diesen Inhalt auf 2 Stellen nach dem Komma genau.

c) Hat das nach oben ins Unendliche reichende Flächenstück F_2, welches von der Parabel p, der Kurve k_1 und der y-Achse begrenzt wird, auch einen endlichen Inhalt ? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Die Kurve $k_2: \; y = b\sqrt{x}$ geht durch den Punkt B. Berechnen Sie die Zahl b exakt (Resultat in einfachster Form). Zeigen Sie, dass die Kurve k_2 die Parabel p und die Kurve k_1 im Punkt B rechtwinklig schneidet.

Aufgabe 5

Eine 10 m lange Fussgängerunterführung hat als Querschnitt ein Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis, dessen Durchmesser gleich der Breite der Unterführung ist. Der Querschnitt besitzt eine Fläche von 15 m^2. Boden, Wände und Gewölbe werden ausgemauert, wobei die Kosten pro m^2 für den Boden Fr. 200.--, für die Wände Fr. 400.-- und für das Gewölbe Fr. 800.-- betragen.

a) Drücken Sie die Gesamtkosten y (in Fr.) für die Ausmauerung als Funktion der Breite x (in m) der Unterführung aus und zeigen Sie, dass $y = 1000 \cdot \frac{(2+3\pi)x^2 + 120}{x}$. Bestimmen Sie den Definitionsbereich dieser Zielfunktion!

b) Welche Breite besitzt die Unterführung, und wie hoch sind die Wände, wenn die erwähnten Gesamtkosten minimal sein sollen (Resultate auf 3 geltende Ziffern genau) ? Wie hoch sind die minimalen Gesamtkosten ? Begründen Sie, das Sie tatsächlich ein Minimum gefunden haben !

c) Mit welchem Faktor vergrössern sich die in der Teilaufgabe b) berechneten Längenmasse, wenn die Querschnittsfläche neu mit 30 m^2 vorgegeben ist ? Zur Beantwortung dieser Frage ist keine grosse Rechnung erforderlich, aber die Antwort muss begründet werden !

Viel Erfolg !