

- Bemerkungen:
- Die Prüfung dauert 4 Stunden.
 - Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
 - Die Lösungswege und die Arbeit mit dem Taschenrechner müssen dokumentiert sein.
 - Geben Sie auch alle Notizen ab.
- Hilfsmittel:
- Formelsammlung (Neue Kantonsschule Aarau) und Taschenrechner TI-89 mit Anleitung.
- Punkte:
- Bei jeder der 5 Aufgaben können maximal 12 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1 (Vektorgeometrieaufgabe)

Eine Fliege verlässt den Punkt $A(-3/2/-1)$ und fliegt - auf einer geraden Flugbahn - durch das Wohnzimmer zum Punkt $B(1/10/-1)$. Eine Biene startet auf einer Blume im Punkt $C(4/2/-5)$ und fliegt ebenfalls geradlinig in

Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (Alle Koordinaten sind in Metern gemessen).

- a) Zeigen Sie, dass die beiden Flugbahnen sich schneiden und berechnen Sie den Schnittpunkt S. (2.5P)
- b) Welches Insekt trifft zuerst im Schnittpunkt S ein, wenn die Fliege für die Flugstrecke \overline{AS} 1.5 Sekunden benötigt, und die Biene mit konstanter Geschwindigkeit von $\sqrt{14}$ m/s unterwegs ist, wobei die beiden Insekten gleichzeitig von den Punkten A resp. C gestartet sind? (1P)
- c) Unter welchem Winkel φ schneiden sich die Flugbahnen? (1.5P)
- d) Wie nah fliegt die Fliege an der Blume (Punkt C) vorbei? (2.5P)
- e) Die Fliege landet im Punkt B auf einem ebenen (*unbeweglichen*) Lampenschirm, der in der Ebene E_{BDF} mit $D(2/1/4)$ und $F(3/1/6)$ liegt. Berechnen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E_{BDF} . (1.5P)
- f) Ein Kind wirft vom Punkt $G(-4/8/5)$ aus einen elastischen Gummiball (*dessen Ausdehnung vernachlässigt werden soll*), auf die Fliege (Punkt B) auf dem Lampenschirm. Der Ball trifft den Lampenschirm genau am richtigen Ort (*die Fliege entweicht aber rechtzeitig*). In welche Richtung prallt der Ball vom Lampenschirm ab? (*Die Erdanziehung soll nicht berücksichtigt werden!*) (3P)

Aufgabe 2 (Extremalproblem und Rotationsvolumen)

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \frac{20}{x^2 + 4}$

Die Teilaufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.

- a) Untersuchen Sie die Funktion ohne abzuleiten (Definitionsbereich, Symmetrieverhalten, Asymptote, Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse) und erstellen Sie eine qualitativ gute Skizze des Graphen. (3P)
- b) Der Graph und die x-Achse begrenzen ein unendliches Flächenstück. In dieses Flächenstück soll ein Rechteck ABCD mit maximalem Flächeninhalt einbeschrieben werden, wobei die Ecken A und B auf der x-Achse und die Ecken C und D auf dem Graphen liegen sollen. Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt des Rechtecks. (3.5P)
- c) c₁) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Geraden $y = g(x) = 2.5$ mit der Funktionskurve von $f(x)$. (0.5P)
Die Gerade $y = g(x) = 2.5$ und die Funktionskurve begrenzen ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn dieses Flächenstück
 - c₂) um die x-Achse rotiert. (2P)
 - c₃) um die y-Achse rotiert. (2.5P)
 - c₄) Wie ändert sich das Rotationsvolumen von c₃, wenn die Gerade $y = 2.5$ zur x-Achse strebt. Bleibt es endlich oder nicht? Begründen Sie Ihre Antwort. (0.5P)

Aufgabe 3 (Steckbriefe)

Die Teilaufgaben a) und b) sind unabhängig voneinander

- a) a₁) Bestimmen Sie die Gleichung der ganzrationalen Funktion 3. Grades $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, deren Graph den Hochpunkt H(0/0) besitzt, die x-Achse bei $x = 6$ schneidet und mit der x-Achse ein Flächenstück mit dem Inhalt von 27 FE einschliesst. Erstellen Sie eine Skizze. (4.5P)

Hinweis: Falls Sie die Funktionsgleichung nicht bestimmen können, nehmen Sie für die folgende Teilaufgabe die falsche Ersatzfunktion: $y = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{4}x^2$

- a₂) Berechnen Sie den Wendepunkt der Funktion und geben Sie an, ob es sich um einen Übergang von einer Rechts- in eine Linkskurve oder von einer Links- in eine Rechtskurve handelt. (1.5 P)

- b) Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + c}$

- b₁) Der Graph der Funktion hat an der Stelle $x = 3$ einen Pol. Die Tangente im Kurvenpunkt P(4/21) steht senkrecht auf der Geraden $x - 11y + 22 = 0$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f. (5P)

Hinweis: Falls Sie die Funktionsgleichung nicht bestimmen können, nehmen Sie für die folgende Teilaufgabe die falschen Ersatzwerte: $a = -6, b = 13, c = 2$

- b₂) Berechnen Sie die Gleichung der schiefen Asymptote von f. (1P)

Aufgabe 4 (Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Die untenstehenden Teilaufgaben a), b), c) und d) sind unabhängig voneinander zu lösen

- a) a₁) Wie viele (auch sinnlose) Wörter lassen sich mit den Buchstaben GESUNDHEIT schreiben? (1P)
a₂) Wie viele dieser Wörter enthalten das Teilwort IDEEN? (1P)

- b) An einem Kongress in Oslo können aus Zeitgründen nur 6 neue Behandlungsmethoden vorgestellt werden. Zur Auswahl stehen 4 dänische, 7 norwegische und 5 schwedische Beiträge. Alle Länder sollen gleich viele Methoden vorstellen dürfen.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat die Kongressleitung bei der Auswahl der Beiträge,

- b₁) wenn es nur darauf ankommt, welche Behandlungsmethoden ausgewählt werden? (1.5P)

- b₂) wenn es darauf ankommt, welche Behandlungsmethoden ausgewählt werden und in welcher Reihenfolge diese vorgestellt werden, wobei die Beiträge des gleichen Landes hintereinander erläutert werden sollen? (1.5P)

- c) Ein neu entwickeltes Medikament gegen eine bis anhin unheilbare Kinderkrankheit hat eine Heilungswahrscheinlichkeit von 40 %.

- c₁) Es werden 50 kranke Kinder mit diesem Medikament behandelt. Wie viele geheilte Kinder erwarten Sie nach Abschluss der Behandlung? (0.5P)

- c₂) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau die erwartete Anzahl (vgl. c₁) der 50 behandelten Kinder geheilt worden ist? (1.5P)

- c₃) Berechnen Sie, wie viele kranke Kinder mindestens behandelt werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99.5% mindestens ein geheiltes Kind zu finden. (2P).

Die Fortsetzung der Aufgabe 4 finden Sie auf Seite 3!

Fortsetzung der Aufgabe 4

- d) Stellen Sie sich vor, Sie sind Arzt resp. Ärztin und ein Kind kommt mit seinen Eltern zur Untersuchung. Sie vermuten auf Grund der Symptome, dass dieses Kind an der seltenen Tropenkrankheit K leidet. Die Wahrscheinlichkeit dieser Krankheit betrage 0.15%. Nun führen Sie mit Einverständnis der Eltern einen Test durch, dessen Sensitivität 97.6% (dh. bei einer kranken Testperson zeigt der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 97.6 % positiv an) und dessen Spezifität 98.9 % (dh. bei einer nicht kranken Testperson zeigt der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 98.9 % negativ an) beträgt.
- d₁) Erstellen Sie ein Baumdiagramm. (1.5P)
- d₂) Das Testergebnis ist *positiv*.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter dieser Bedingung das Kind tatsächlich krank ist. (Diese Berechnung liefert die Begründung, warum Sie die Eltern vorerst beruhigen und ihnen einen 2. Test empfehlen.) (1.5P)

Aufgabe 5

Teil 1: (Folgen, Reihen, Trigonometrie)

Gegeben ist eine unendliche Folge von zu einander ähnlichen Parallelogrammen P_i (vgl. Abbildung).

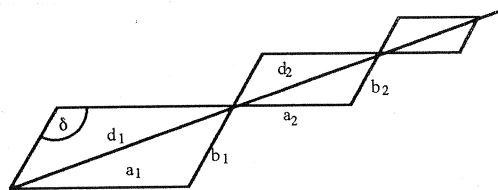
Das erste Parallelogramm P_1 hat die Seitenlängen

$a_1 = 6$ cm und $b_1 = 3$ cm, das zweite

Parallelogramm P_2 die Seitenlängen

$a_2 = 4$ cm und $b_2 = 2$ cm.

Der Winkel δ beträgt 120° .



- a) a₁) Berechnen Sie den Gesamtflächeninhalt A der (unendlich weiterführenden) Figur exakt. (3P)
- a₂) Vom wievielten Parallelogramm P_n an ist dessen Flächeninhalt kleiner als $1/1000$ des Gesamtflächeninhalts A ? (1.5P)
- b) Berechnen Sie die Gesamtlänge der Diagonale d der (unendlich weiterführenden) Figur exakt. (1.5P)

Teil 2: (Zerfall)

Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe ab. Auf Meereshöhe beträgt der Luftdruck $p_0 = 1013$ mbar, auf 2000 m über Meer beträgt der Luftdruck nur noch 785 mbar.

- a) a₁) Stellen Sie das Gesetz für die Abnahme des Luftdruckes (als Funktion der Höhe) in der Form $p(h) = p_0 \cdot a^h$ (h : in km über Meer) auf. (Geben Sie a auf zwei Dezimalstellen genau an.) (1.5P)
- a₂) Um wieviel % nimmt der Luftdruck pro km (Höhenunterschied) ab? (0.5P)
- b) Berechnen Sie, wie gross der Luftdruck auf 5420 m über Meer ist. Vergleichen Sie diesen mit demjenigen auf Meereshöhe. (1.5P)
- c) Berechnen Sie, wieviel Meter über Meer (auf 10 Meter genau) sich eine Bergspitze befindet, wenn sich der dort herrschende Luftdruck im Vergleich zu demjenigen auf Meereshöhe um 32% verringert hat. (1.5P)
- d) Geben Sie das Gesetz für die Abnahme des Luftdruckes nun noch in der aus der Physik bekannten Form: $p(h) = p_0 e^{-\frac{h}{H}}$ (Barometerformel) an. (e : Euler'sche Zahl; geben Sie H auf km genau an.) (1P)

Viel Erfolg wünschen Ihnen B. Felder, G. Lafranchi, E. Rast und R. Ugolini