**Gymnasium Liestal** **Maturitätsprüfungen 2003**

***Mathematik*** ***Klassen 4A/4B (Profil A/B)***

---

*Bemerkungen:*
- *Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.*
- *Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!*

*Hilfsmittel:*
- *Taschenrechner TI–89, TI–92 oder Voyage 200 mit Handbuch*
  *Formelsammlung*

*Punkteverteilung:*

| *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | ***Total*** |
|---|---|---|---|---|---|
| *10* | *10* | *10* | *5+5* | *5+5* | ***50 P.*** |

---

1. a) Skizzieren Sie einige Kurven $F_a$ der Schar $f_a(x) = a \cdot \left(4 - x^2\right)$ für $a > 0$.

   Zeichnen Sie in die gleiche Skizze den Graphen G von $g(x) = 2x - \frac{1}{2}x^3$.

   b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von $F_a$ und G in Abhängigkeit von a.
   Für welche a berühren die Scharkurven $F_a$ die Kurve G?

   c) Die Kurve G begrenzt mit fast jeder der Kurven $F_a$ zwei geschlossene Flächenstücke.
   Berechnen Sie deren Inhalte in Funktion von a.
   Versuchen Sie a so zu bestimmen, dass das Verhältnis der beiden Flächen 1:1 ist.

2. Von einem Würfel $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kennt man ein Diagonalenrechteck $ABC_1D_1$ mit A(2|0|7), B(6|–2|3), $C_1$(0|–2|–3) und $D_1$(–4|0|1).

   a) Weisen Sie nach, dass $ABC_1D_1$ wirklich ein solches Diagonalenrechteck ist.

   b) Berechnen Sie die fehlenden Würfelecken.

   Fahren Sie zur Vereinfachung für den folgenden Aufgabenteil fort mit dem Würfel gegeben durch A(2|2|5), B(6|0|1), C(4|4|–3), D(0|6|1), $A_1$(–2|–2|3), $B_1$(2|–4|–1), $C_1$(0|0|–5) und $D_1$(–4|2|–1).
   *Hinweis: Sie müssen nicht nachprüfen, dass diese Punkte tatsächlich die Ecken eines Würfels sind.*

   c) Zeichnen Sie auf dem Beilageblatt ein Schrägbild des Würfels.

   d) Es fällt Ihnen sicher auf, dass die Bilder der Kanten $AA_1$, $BB_1$, etc. parallel zur y–Achse erscheinen.
   Ist dies tatsächlich so?

   e) Die yz–Ebene schneidet aus dem Würfel ein Polygon aus.
   Bestimmen Sie die Ecken und den Flächeninhalt dieses Polygons.

3. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis AB = 8 LE, der Spitze C und der zugehörigen Höhe $h_C$=8LE.
Eine Parabel mit der gleichen Symmetrieachse wie das Dreieck soll die Schenkel AC bzw. BC berühren. Die Berührungspunkte sollen also auf den Schenkeln liegen.

a) Untersuchen Sie, welche Lage der Scheitelpunkt für die verschiedenen möglichen Parabeln hat. Welches ist die tiefste bzw. die höchste Lage?

b) Für welche der Parabeln wird der Inhalt des im Innern des Dreiecks gelegenen Parabelsegments extremal?
Ist es ein Maximum oder ein Minimum?
Welchen Bruchteil der Dreiecksfläche macht die extremale Segmentfläche aus?

4. *Diese Aufgabe besteht aus zwei unabhängigen Teilaufgaben.*

4.1 Einer Statistik aus dem Jahr 1975 aus Deutschland entnimmt man, dass der Anteil der an Tuberkulose (Tbc) Erkrankten 0.5% der Bevölkerung betrug. Auf Grund jahrelanger Erfahrung weiss man, dass ein spezieller Tbc–Röntgentest 90% der Kranken und 99% der Gesunden richtig diagnostiziert.

*Hinweis: Runden Sie im Folgenden alle Endergebnisse auf drei signifikante Stellen.*

a) Eine medizinische Diagnose kann auf zwei Arten falsch sein:
1.: Der Patient hat die betreffende Krankheit, sie wird aber nicht erkannt.
2.: Der Patient hat die Krankheit nicht, obschon sie vom Test diagnostiziert wird.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Möglichkeiten.

b) Herr Meier hat am Röntgentest teilgenommen. Das Untersuchungsergebnis weist ihn als Tbc–krank aus.
Mit welcher dadurch bedingten Wahrscheinlichkeit ist er wirklich an Tbc erkrankt?

c) Frau Müller erhielt nach ihrem Test den Bericht, dass sie gesund sei.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie dies wirklich?

4.2. In einer Quiz–Show wird ein Spiel mit 7 Kandidaten durchgeführt. Die Erfahrung früherer Shows zeigt, dass 5% der eingeladenen Kandidaten nicht zur Sendung erscheinen.

a) Vorsichtshalber werden daher 8 Leute eingeladen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind bei der Sendung mindestens 7 Personen anwesend?

b) Wie viele Personen müssen eingeladen werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 7 Personen wirklich da sind, grösser als 99.9% ist?

5. *Diese Aufgabe besteht aus zwei unabhängigen Teilaufgaben.*

5.1. Eine Zahlenfolge $(a_n)$ ist rekursiv definiert durch $a_1 = \frac{1}{2}$ und $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$.

$(s_n)$ sei die zugehörige Reihe (d.h. die Teilsummenfolge mit $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$).

a) Berechnen Sie die ersten vier Glieder von $(a_n)$ und $(s_n)$ exakt.

b) Beweisen Sie ohne jede Hilfe des Taschenrechners: $a_n = 1 - \frac{1}{n \cdot (n+1)}$.

c) Suchen Sie eine einfache Formel für $s_n$.
*Hinweis: Es reicht, die Formel ohne Beweis anzugeben.*

d) Existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ und $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$?
Geben Sie die Werte an oder begründen Sie, warum sie nicht existieren.

5.2. a) Lösen Sie die Gleichung $(2i-2) \cdot z^3 + (6-6i) \cdot z^2 + (6i-6) \cdot z + 1 - 2i = 0$.

b) Stellen Sie die Lösungen als Punkte in der Gauss'schen Zahlenebene dar (1 LE $\notin$ 5 Häuschen).

c) Zeigen Sie durch geeignete Rechnung, dass die drei Punkte ein gleichseitiges Dreieck bilden.

d) Stellen Sie auch die Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$ graphisch dar.
Bestimmen Sie eine Abbildung $f(z) = a \cdot z + b$, welche die Lösungen dieser Gleichung auf die Lösungen der Gleichung aus Aufgabe a) abbildet.
Durch die Bestimmung der Abbildung f wird auch die Aufgabe c) gelöst. Warum?

*Viel Erfolg wünschen Ihnen H.–U. Kubli und M. Erdin!*